TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 02

Miguel Ángel García Álvarez

Teoremas de clases monótonas

Definición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que:*

1. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo complementos si $A^c \in \mathcal{G}$ para cualquier $A \in \mathcal{G}$.*
2. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo diferencias propias si $B - A \in \mathcal{G}$ para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{G}$ tal que $A \subset B$.*
3. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) finitas si $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
4. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) monótonas si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier sucesión creciente (resp. decreciente) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{G}$.*

Definición 2. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathbb{M}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que $\mathbb{M}$ es una clase monótona si es cerrada bajo uniones e intersecciones monótonas.*

Definición 3. *Dado un conjunto $\mathbb{F}$ y una familia arbitraria de clases monótonas de subconjuntos de $\mathbb{F}$, se define la intersección de esas clases monótonas como la familia de conjuntos que pertenecen a todas ellas.*

Se puede ver fácilmente que la intersección de clases monótonas, de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, forma una clase monótona.

Definición 4. *Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, se define la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ como la intersección de todas las clases monótonas que contienen a todos los elementos de $\mathcal{A}$ y se le denota por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Obsérvese que la definición anterior es consistente pues dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$ existe por lo menos una clase monótona que contiene a todos los conjuntos de $\mathcal{A}$, a saber, la clase monótona formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{F}$.

Obsérvese también que la clase monótona generada por una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$ es la más pequeña clase monótona de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que contiene a todos los elementos de $\mathcal{A}$.

Teorema 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, entonces la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ sigue siendo un álgebra.*

Demostración

Para demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrada bajo complementos, sea:

$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

$\mathcal{C}$ es entonces una clase monótona.

En efecto, si $A_1 \subset A_2 \cdots$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}$ entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $A_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, así que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, por lo tanto, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$.

De la misma manera se demuestra que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intersecciones monótonas.

Obviamente $\mathcal{C}$ contiene a $\mathcal{A}$, de manera que entonces se puede concluir que $\mathcal{C}$ contiene a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, lo cual prueba que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrada bajo complementos.

Para demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrada bajo intersecciones finitas, sea:

$\mathcal{C}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ para cualquier $B \in \mathcal{A}\}$.

$\mathcal{C}_1$ es entonces una clase monótona.

En efecto, si $A_1 \subset A_2 \cdots$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}_1$ entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{A}$, se tiene $A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, así que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, por lo tanto, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_1$.

De la misma manera se demuestra que $\mathcal{C}_1$ es cerrada bajo intersecciones monótonas.

Obviamente $\mathcal{C}_1$ contiene a $\mathcal{A}$, de manera que entonces se puede concluir que $\mathcal{C}_1$ contiene a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, es decir, para cualquier $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $B \in \mathcal{A}$, se tiene $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Sea ahora:

$\mathcal{C}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ para cualquier } B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

$\mathcal{C}_2$ es entonces una clase monótona.

En efecto, si $A_1 \subset A_2 \cdots$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}_2$ entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, se tiene $A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, así que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, por lo tanto, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_2$.

De la misma manera se demuestra que $\mathcal{C}_2$ es cerrada bajo intersecciones monótonas.

Como $\mathcal{C}_1$ contiene a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ se tiene que $\mathcal{C}_2$ contiene a $\mathcal{A}$, de manera que entonces se puede concluir que $\mathcal{C}_2$ contiene a $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, es decir, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, se tiene $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

■

Corolario 1 (Teorema de clases monótonas para álgebras)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, entonces $\sigma(A) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

El teorema 1 puede ser insuficiente pues en ocasiones únicamente se puede demostrar inmediatamente que la propiedad que se quiere probar como válida para cualquier elemento de una σ-álgebra se cumple para una familia de conjuntos que la generan y que es cerrada sólo bajo intersecciones finitas (por ejemplo, la familia formada por todos los intervalos de números reales).

Definición 5. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{P}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que $\mathcal{P}$ es un π-sistema si es cerrada bajo intersecciones finitas.*

Definición 6. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que $\mathcal{D}$ es un d-sistema si $\mathbb{F} \in \mathcal{D}$ y es cerrada bajo diferencias propias y uniones monótonas.*

Definición 7. *Dado un conjunto $\mathbb{F}$ y una familia arbitraria de d-sistemas de subconjuntos de $\mathbb{F}$, se define la intersección de esos d-sistemas como la familia de conjuntos que pertenecen a todas ellas.*

Se puede ver fácilmente que la intersección de d-sistemas, de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, forma un d-sistema.

Definición 8. *Dada una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, se define el d-sistema generado por $\mathcal{G}$ como la intersección de todos los d-sistemas que contienen a todos los elementos de $\mathcal{G}$ y se le denota por $d(\mathcal{G})$.*

Obsérvese que la definición anterior es consistente pues dada cualquier colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$ existe por lo menos un d-sistema que contiene a todos los conjuntos de $\mathcal{P}$, a saber, el d-sistema formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{F}$.

Obsérvese también que el d-sistema generado por una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$ es el más pequeño d-sistema de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que contiene a todos los elementos de $\mathcal{P}$.

Teorema 2. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{P}$ un π-sistema de subconjuntos de $\mathbb{F}$, entonces el d-sistema generado por $\mathcal{P}$ es un π-sistema.*

Demostración

Sea:

$\mathcal{C}_1 = \{A \in d(\mathcal{P}) : A \cap B \in d(\mathcal{P})$ para cualquier $B \in \mathcal{P}\}$.

$\mathcal{C}_1$ es entonces un d-sistema. En efecto, si $A_1 \subset A_2 \cdots$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}_1$ entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{P}$, se tiene $A_n \in d(\mathcal{P})$ y $A_n \cap B \in d(\mathcal{P})$, así que $\bigcup_n A_n \in d(\mathcal{P})$ y $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in d(\mathcal{P})$, por lo tanto, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_1$. Sean ahora $A, C \in \mathcal{C}_1$ tales que $A \subset C$, entonces $A, C, A \cap B, C \cap B \in d(\mathcal{P})$ y $A \cap B \subset C \cap B$ para cualquier $B \in \mathcal{P}$, así que $C - A \in d(\mathcal{P})$ y $(C - A) \cap B = C \cap B - A \cap B \in d(\mathcal{P})$, por lo tanto, $C - A \in \mathcal{C}_1$. Finalmente, es obvio que $F \in \mathcal{C}_1$.

Obviamente $\mathcal{C}_1$ contiene a $\mathcal{P}$, de manera que entonces se puede concluir que $\mathcal{C}_1$ contiene a $d(\mathcal{P})$, es decir, para cualquier $A \in d(\mathcal{P})$ y $B \in \mathcal{P}$, se tiene $A \cap B \in d(\mathcal{P})$.

Sea ahora:

$\mathcal{C}_2 = \{A \in d(\mathcal{P}) : A \cap B \in d(\mathcal{P})$ para cualquier $B \in d(\mathcal{P})\}$.

$\mathcal{C}_2$ es entonces un d-sistema. En efecto, si $A_1 \subset A_2 \cdots$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}_2$ entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $B \in d(\mathcal{P})$, se tiene $A_n \in d(\mathcal{P})$ y $A_n \cap B \in d(\mathcal{P})$, así que $\bigcup_n A_n \in d(\mathcal{P})$ y $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in d(\mathcal{P})$, por lo tanto, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_2$. Sean ahora $A, C \in \mathcal{C}_2$ tales que $A \subset C$, entonces $A, C, A \cap B, C \cap B \in d(\mathcal{P})$ y $A \cap B \subset C \cap B$ para cualquier $B \in d(\mathcal{P})$, así que $C - A \in d(\mathcal{P})$ y $(C - A) \cap B = C \cap B - A \cap B \in d(\mathcal{P})$, por lo tanto, $C - A \in \mathcal{C}_2$. Finalmente, es obvio que $\Omega \in \mathcal{C}_2$.

Como $\mathcal{C}_1$ contiene a $d(\mathcal{P})$, se tiene que $\mathcal{C}_2$ contiene a $\mathcal{P}$, de manera que entonces se puede concluir que $\mathcal{C}_2$ contiene a $d(\mathcal{P})$, es decir, para cualesquiera $A, B \in d(\mathcal{P})$, se tiene $A \cap B \in d(\mathcal{P})$.

$\blacksquare$

Corolario 2 (Teorema de clases monótonas para pi sistemas)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{P}$ un π-sistema de subconjuntos de $\mathbb{F}$, entonces $d(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P})$.*

Funciones finitamente aditivas y σ-aditivas

Vamos a trabajar con el conjunto de números reales extendidos, el cual consiste del conjunto de números reales y dos elementos especiales, $-\infty$ y ∞, con los cuales operaremos bajo las siguientes convenciones:

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$-\infty < c < \infty$,

$c - \infty = -\infty$,

$c + \infty = \infty$,

$c\,(\infty) = \infty$ si $c > 0$,

$c\,(\infty) = -\infty$ si $c < 0$,

$(0)\,(\infty) = (0)\,(-\infty) = 0$,

$\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$,

$(\infty)\,(\infty) = \infty + \infty = \infty$,

$\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ no están definidos.

$\overline{\mathbb{R}}$ denotará al conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición 9 (Función finitamente aditiva sobre un álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es finitamente aditiva si dada cualquier familia finita, $A_1, \ldots, A_n$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.*

Obsérvese que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, para probar que una función $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es finitamente aditiva, basta con demostrar que si A y B son dos conjuntos ajenos del álgebra, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Teniendo esta propiedad, la aditividad finita se prueba con un razonamiento de inducción.

Definición 10 (Función $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva sobre un álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, entonces $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.*

Definición 11 (Función $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva sobre una σ-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\Im$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.*

Proposición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa finitamente aditiva, entonces:*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.*

Demostración

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B - A)$, así que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Por lo tanto, $\mu(A) \leq \mu(B)$, ya que μ es no negativa.

Sean ahora $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ y definamos $A_0 = \emptyset$, entonces:

$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right)\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

∎

Corolario 3. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa finitamente aditiva, entonces:*

Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ y $\mu(A) < \infty$, entonces:

$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \infty$ o $\mu(B) < \infty$, se tiene:

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Teorema 3. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \Im \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa σ-aditiva. Entonces:*

1. *Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$, se tiene:*
   $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
2. *Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$, tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$, se tiene:*
   $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.

Demostración

1. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de elementos de $\Im$.

Si $\mu(A_n) = \infty$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) = \infty$ y $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$; así que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.

Supongamos ahora que $\mu(A_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Definamos $B_1 = A_1$ y, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $B_n = A_n - A_{n-1}$. Entonces los conjuntos $B_1, B_2, \ldots$ pertenecen a $\Im$, son ajenos por parejas y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Así que:

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$

$= \mu(B_1) + \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=2}^{n} \mu(A_k - A_{k-1}) = \mu(B_1) + \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=2}^{n} [\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})]$

$= \mu(B_1) + \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) - \mu(A_1) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.

2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de elementos de $\Im$ tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \{N+1, N+2, \ldots\}$, definamos $B_k = A_N - A_k$. Entonces la sucesión $(B_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n = A_N - \bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n$, así que:

$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_N) - \mu\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right)$

$= \mu(A_N) - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(B_{N+n}) = \mu(A_N) - \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_N - A_{N+n})$

$= \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_{N+n}) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n).$

■

El axioma de elección y el lema de Zorn

Axioma de elección

Sea $\mathbb{H}$ un conjunto formado por conjuntos no vacíos, ajenos por parejas. Existe entonces un conjunto **E,** el cual está formado por exactamente un elemento de cada conjunto $A \in \mathbb{H}$.

Conjuntos parcialmente ordenados

Definición 12. *Se dice que un conjunto $\mathbb{F}$, para el cual está definida una relación de orden $\preceq$, es parcialmente ordenado si se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $x \preceq x$ para cualquier elemento $x \in \mathbb{F}$.

2. Si $x, y, z \in \mathbb{F}$ son tales que $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.

3. Si $x, y \in \mathbb{F}$ son tales que $x \preceq y$ y $x \neq y$, entonces $y \not\preceq x$.

Si, además, se cumple la siguiente la siguiente propiedad, se dice que $(\mathbb{F}, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado:

4. Si $x, y \in \mathbb{F}$ y $x \neq y$, entonces exactamente una de las siguientes dos relaciones es válida:

a) $x \preceq y$

b) $y \preceq x$

Definición 13. *Si $(\mathbb{F}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in \mathbb{F}$, diremos que $x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$.*

Definición 14. *Si $(\mathbb{F}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, diremos que un subconjunto $\mathbb{E}$ de $\mathbb{F}$ es una cadena en $\mathbb{F}$ si $(\mathbb{E}, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.*

Definición 15. *Si $(\mathbb{F}, \preceq)$ es un conjunto es parcialmente ordenado, diremos que un elemento $z \in \mathbb{F}$ es maximal si no existe algún elemento $x \in \mathbb{F}$ tal que $z \prec x$.*

Definición 16. *Si* $(\mathbb{F}, \preceq)$ *es un conjunto es parcialmente ordenado y* $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$*, diremos que un elemento* $z \in \mathbb{F}$ *es una cota superior de* $\mathbb{E}$ *si* $x \preceq z$ *para cualquier* $x \in \mathbb{E}$*.*

Lema de Zorn

Sea $(\mathbb{F}, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cualquier cadena $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$ tiene una cota superior en $\mathbb{F}$, entonces $\mathbb{F}$ tiene, por lo menos, un elemento maximal.

Extensión de una medida definida sobre un álgebra

Sea $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y $\lambda : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ una función finitamente aditiva tal que $\lambda(\Omega) = 1$.

Para cada conjunto $B \subset \Omega$, definamos:

$\lambda_i(B) = \sup\{\lambda(A) : A \subset B \text{ y } A \in \mathcal{A}\}$

$\lambda_e(B) = \text{ínf}\{\lambda(A) : A \supset B \text{ y } A \in \mathcal{A}\}$

Evidentemente se tiene:

$0 \leq \lambda_i(B) \leq \lambda_e(B) \leq 1$ para cualquier conjunto $B \subset \Omega$.

Proposición 2. *Sean* A, B *dos subconjuntos de* Ω *tales que* $A \cap B = \emptyset$*, entonces:*

$\lambda_i(A) + \lambda_i(B) \leq \lambda_i(A \cup B)$

$\lambda_e(A \cup B) \leq \lambda_e(A) + \lambda_e(B)$

Demostración

1. Para demostrar que $\lambda_i(A) + \lambda_i(B) \leq \lambda_i(A \cup B)$, sean $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ tales que $C_1 \subset A$ y $C_2 \subset B$. Entonces $C_1 \cup C_2 \subset A \cup B$, así que:

$\lambda_i(A \cup B) \geq \lambda(C_1 \cup C_2) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$

Por lo tanto:

$\lambda_i(A \cup B) \geq \sup\{\lambda(C_1) + \lambda(C_2) : C_1 \subset A, C_2 \subset B \text{ y } C_1, C_2 \in \mathcal{A}\}$

Fijando C_1, obtenemos:

$\lambda_i(A \cup B) \geq \lambda(C_1) + \sup\{\lambda(C_2) : C_2 \subset B \text{ y } C_2 \in \mathcal{A}\}$

para cualquier $C_1 \in \mathcal{A}$ tal que $C_1 \subset A$.

Así que:

$\lambda_i (A \cup B) \geq \sup \{\lambda (C_1) : C_1 \subset A \text{ y } C_1 \in \mathcal{A}\} + \sup \{\lambda (C_2) : C_2 \subset B \text{ y } C_2 \in \mathcal{A}\}$

$= \lambda_i (A) + \lambda_i (B)$

2. Para demostrar que $\lambda_e (A \cup B) \leq \lambda_e (A) + \lambda_e (B)$, sean $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ tales que $C_1 \supset A$ y $C_2 \supset B$. Entonces $C_1 \cup C_2 \supset A \cup B$, así que:

$\lambda_e (A \cup B) \leq \lambda (C_1 \cup C_2) \leq \lambda (C_1) + \lambda (C_2)$

Por lo tanto:

$\lambda_e (A \cup B) \leq \text{ínf} \{\lambda (C_1) + \lambda (C_2) : C_1 \supset A, C_2 \supset B \text{ y } C_1, C_2 \in \mathcal{A}\}$

Fijando C_1, obtenemos:

$\lambda_e (A \cup B) \leq \lambda (C_1) + \text{ínf} \{\lambda (C_2) : C_2 \supset B \text{ y } C_2 \in \mathcal{A}\}$

para cualquier $C_1 \in \mathcal{A}$ tal que $C_1 \supset A$.

Así que:

$\lambda_e (A \cup B) \leq \text{ínf} \{\lambda (C_1) : C_1 \supset A \text{ y } C_1 \in \mathcal{A}\} + \text{ínf} \{\lambda (C_2) : C_2 \supset B \text{ y } C_2 \in \mathcal{A}\}$

$= \lambda_e (A) + \lambda_e (B)$

$\blacksquare$

También, para cualquier par de subconjuntos de Ω, A y B, tales que $A \cap B = \emptyset$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\lambda_i (A \cup B) \leq \lambda_i (A) + \lambda_e (B) \leq \lambda_e (A \cup B)$$

Sin embargo, no tengo una demostración simple de este resultado.

En el libro *Theory of charges, A study of finitely additive measures*, de K. P. S. Bhaskara Rao y M. Bhaskara Rao, se hace la demostración mostrando primero que λ_i y λ_e se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\lambda_i (A) = \sup \tfrac{1}{k} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda (A_j) - \sum_{j=1}^{m} \lambda (B_j) \right)$$

Donde el supremo es tomado sobre todas las familias finitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que, para algún número natural k, se cumpla la desigualdad:

$$k I_A + \textstyle\sum_{j=1}^{m} I_{B_j} \geq \sum_{j=1}^{n} I_{A_j}$$

$$\lambda_e(A) = \text{ínf} \, \tfrac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \lambda(B_j)\right)$$

Donde el ínfimo es tomado sobre todas las familias finitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que, para algún número natural k, se cumpla la desigualdad:

$$kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{B_j} \leq \sum_{j=1}^{n} I_{A_j}$$

He estado buscando una demostración directa de la mencionada desigualdad, pero no la he encontrado. Tal vez alguien de los participantes la encuentre.

Corolario 4. *Sean A y B dos subconjuntos de Ω tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B \in \mathcal{A}$,entonces:*

$\lambda(A \cup B) = \lambda_i(A) + \lambda_e(B)$

Proposición 3. *Sean A y B dos subconjuntos de Ω para los cuales existen $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset C$, $B \subset D$ y $C \cap D = \emptyset$. Entonces:*

$\lambda_i(A \cup B) = \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$

$\lambda_e(A \cup B) = \lambda_e(A) + \lambda_e(B)$

Demostración

Por la proposición **??**, únicamente hay que demostrar las siguientes desigualdades:

$\lambda_i(A \cup B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$

$\lambda_e(A \cup B) \geq \lambda_e(A) + \lambda_e(B)$

Para demostrar la primera desigualdad, dada $\varepsilon > 0$, sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $E \subset A \cup B$ y $\lambda(E) \geq \lambda_i(A \cup B) - \epsilon$.

Se tiene entonces $E \subset A \cup B \subset C \cup D$, $E \cap C \subset A$ y $E \cap D \subset B$; así que:

$\lambda(E) = \lambda[E \cap (C \cup D)] = \lambda(E \cap C) + \lambda(E \cap D) \leq \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$

Por lo tanto:

$\lambda_i(A \cup B) - \epsilon \leq \lambda(E) \leq \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$

Finalmente, como esta relación se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene:

$\lambda_i(A \cup B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$

Para demostrar la segunda desigualdad, dada $\varepsilon > 0$, sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $E \supset A \cup B$ y $\lambda(E) \leq \lambda_e(A \cup B) + \epsilon$.

Se tiene entonces $E \cap C \supset A$ y $E \cap D \supset B$; así que:

$\lambda_e(A \cup B) + \epsilon \geq \lambda(E) \geq \lambda[E \cap (C \cup D)] = \lambda(E \cap C) + \lambda(E \cap D) \geq \lambda_e(A) + \lambda_e(B)$

Finalmente, como esta relación se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene:

$\lambda_e(A \cup B) \geq \lambda_e(A) + \lambda_e(B)$

■

Ejercicio 1. *Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{A}$ y denotemos por $\mathcal{F}$ al álgebra generada por A y los elementos de $\mathcal{A}$. Demuestra que:*

$\mathcal{F} = \{(A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A^c) : A_1, A_2 \in \mathcal{A}\}$

Proposición 4. *Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{A}$ y denotemos por $\mathcal{F}$ al álgebra generada por A y los elementos de $\mathcal{A}$. Definamos $\overline{\lambda} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ de la siguiente manera:*

$\overline{\lambda}(B) = \lambda_i(B \cap A) + \lambda_e(B \cap A^c)$

Entonces $\overline{\lambda}$ es una función no negativa y finitamente aditiva tal que:

$\overline{\lambda}(B) = \lambda(B)$ *para cualquier conjunto $B \in \mathcal{A}$.*

Demostración

Sea $B \in \mathcal{A}$; como $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, utilizando el corolario 4, se tiene:

$\lambda(B) = \lambda((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = \lambda_i(B \cap A) + \lambda_e(B \cap A^c) = \overline{\lambda}(B)$

Para demostrar la aditividad finita, sean $C, D \in \mathcal{F}$ tales que $C \cap D = \emptyset$.

C y D son de la forma:

$C = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)$ son $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$.

$D = (D_1 \cap A) \cup (D_2 \cap A^c)$ son $D_1, D_2 \in \mathcal{A}$.

Como C y D son ajenos, Si en lugar de C_1 y C_2 tomamos $C_1 - D_1$ y $C_2 - D_2$, respectivamente, la primera igualdad sigue siendo válida; así que podemos asumir que $C_1 \cap D_1 = \emptyset$ y $C_2 \cap D_2 = \emptyset$.

Tenemos entonces:

$\overline{\lambda}(C \cup D) = \lambda_i((C \cup D) \cap A) + \lambda_e((C \cup D) \cap A^c)$

$= \lambda_i((C_1 \cup D_1) \cap A) + \lambda_e((C_2 \cup D_2) \cap A^c)$

$= \lambda_i ((C_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)) + \lambda_e ((C_2 \cap A^c) \cup (D_2 \cap A^c))$

$= \lambda_i (C_1 \cap A) + \lambda_i (D_1 \cap A) + \lambda_e (C_2 \cap A^c) + \lambda_e (D_2 \cap A^c)$

$= \lambda_i (C \cap A) + \lambda_e (C \cap A^c) + \lambda_i (D \cap A) + \lambda_e (D \cap A^c)$

$= \overline{\lambda} (C) + \overline{\lambda} (D)$

Por lo tanto, $\overline{\lambda}$ es finitamente aditiva.

∎

Teorema 4. *Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ el álgebra generada por A y los elementos de $\mathcal{A}$ y $c_0 \in [\lambda_i (A), \lambda_e (A)]$. Existe entonces una función $\overline{\lambda} : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ tal que:*

1. $\overline{\lambda}$ es finitamente aditiva.

2. $\overline{\lambda} (B) = \lambda (B)$ para cualquier $B \in \mathcal{A}$.

3. $\overline{\lambda} (A) = c_0$.

Demostración

Definamos $\overline{\lambda_1} : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ y $\overline{\lambda}_2 : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ de la siguiente manera:

$\overline{\lambda}_1 (B) = \lambda_i (B \cap A) + \lambda_e (B \cap A^c)$

$\overline{\lambda}_2 (B) = \lambda_i (B \cap A^c) + \lambda_e (B \cap A)$

Entonces $\overline{\lambda}_1$ y $\overline{\lambda}_2$ son funciones no negativas y finitamente aditivas tales que:

$\overline{\lambda}_1 (B) = \lambda (B)$ y $\overline{\lambda}_2 (B) = \lambda (B)$, para cualquier conjunto $B \in \mathcal{A}$.

Sea a un número real arbitrario en el intervalo $[0,1]$ y definamos $\overline{\lambda}_a : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ de la siguiente manera:

$\overline{\lambda}_a (B) = a\overline{\lambda}_1 (B) + (1-a) \overline{\lambda}_2 (B)$

Como $\overline{\lambda}_1$ y $\overline{\lambda}_2$ son funciones no negativas y finitamente aditivas, $\overline{\lambda}_a$ también es no negativa y finitamente aditiva.

Si $B \in \mathcal{A}$, se tiene:

$\overline{\lambda}_a (B) = a\overline{\lambda}_1 (B) + (1-a) \overline{\lambda}_2 (B) = a\lambda (B) + (1-a) \lambda (B) = \lambda (B)$

Finalmente:

$\overline{\lambda}_a (A) = a\overline{\lambda}_1 (A) + (1-a) \overline{\lambda}_2 (A) = a\lambda_i (A) + (1-a) \lambda_e (A) = \lambda_e (A) - a (\lambda_e (A) - \lambda_i (A))$

Si $\lambda_i\left(\ A\right) = \lambda_e\left(A\right)$, tomemos un valor arbitrario de a y definamos $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_a$, entonces:

$\overline{\lambda}\left(A\right) = \lambda_e\left(A\right) = c_0$

Si $\lambda_i\left(\ A\right) \neq \lambda_e\left(A\right)$, tomemos $a = \frac{\lambda_e(A) - c_0}{\lambda_e(A) - \lambda_i(\ A)}$ y definamos $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_a$, entonces:

$\overline{\lambda}\left(A\right) = \lambda_e\left(A\right) - a\left(\lambda_e\left(A\right) - \lambda_i\left(\ A\right)\right) = \lambda_e\left(A\right) - \left(\lambda_e\left(A\right) - \lambda_i\left(\ A\right)\right)\frac{\lambda_e(A) - c_0}{\lambda_e(A) - \lambda_i(\ A)} = c_0$

$\blacksquare$

Teorema 5. *Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{A}$, $c_0 \in \left[\lambda_i\left(A\right), \lambda_e\left(A\right)\right]$ y $\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ el conjunto potencia de Ω. Existe entonces una función $\overline{\lambda} : \mathcal{P}\left(\Omega\right) \mapsto [0,1]$ tal que:*

1. $\overline{\lambda}$ es finitamente aditiva.

2. $\overline{\lambda}\left(A\right) = \lambda\left(A\right)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

3. $\overline{\lambda}\left(A\right) = c_0$.

Demostración

Definamos:

$\mathbb{H} = \{(\mathcal{G}, m) : \mathcal{G}$ es un álgebra de subconjuntos de $\Omega, \mathcal{A} \subset \mathcal{G}, A \in \mathcal{G}$

y $m : \mathcal{G} \mapsto [0,1]$ es una función finitamente aditiva tal que:

1. $m\left(B\right) = \lambda\left(B\right)$ para cualquier $B \in \mathcal{A}$.

2. $m\left(A\right) = c_0.\}$

Para $\left(\mathcal{G}, m\right), \left(\mathcal{G}', m'\right) \in \mathbb{H}$ definamos:

$\left(\mathcal{G}, m\right) \preceq \left(\mathcal{G}', m'\right)$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ y $m'\left(B\right) = m\left(B\right)$ para cualquier $B \in \mathcal{G}$.

$(\mathbb{H}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $\mathbb{K} = \{\left(\mathcal{G}_\gamma, m_\gamma\right) : \gamma \in \Gamma\}$ una cadena en $\mathbb{H}$. Es decir, $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ y $(\mathbb{K}, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Definamos:

$\mathcal{G} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma$

$m : \mathcal{G} \mapsto [0,1]$ de la siguiente manera:

$m\left(B\right) = m_\gamma\left(B\right)$ si $B \in \mathcal{G}_\gamma$.

$\mathcal{G}$ es entonces un álgebra de subconjuntos de Ω y m es una función finitamente aditiva tal que:

1. $m(A) = \lambda(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

2. $m(A) = c_0$.

Además, se tiene:

$(\mathcal{G}_\gamma, m_\gamma) \preceq (\mathcal{G}, m)$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$.

Por lo tanto, $(\mathcal{G}, m)$ es una cota superior de $\mathbb{K}$.

Por el lema de Zorn, $\mathbb{H}$ tiene un elemento maximal $(\mathcal{G}_{\text{máx}}, m_{\text{máx}})$.

Si $\mathcal{G}_{\text{máx}} \neq \mathcal{P}(\Omega)$, entonces existe $\mathbf{V} \subset \Omega$ tal que $\mathbf{V} \notin \mathcal{G}_{\text{máx}}$.

Sea $\mathcal{F}$ el álgebra generada por $\mathbf{V}$ y los elementos de $\mathcal{G}_{\text{máx}}$, y $\overline{m}_{\text{máx}} : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ una función finitamente aditiva que extiende $m_{\text{máx}}$ de $\mathcal{G}_{\text{máx}}$ a $\mathcal{F}$. Entonces:

$(\mathcal{G}_{\text{máx}}, m_{\text{máx}}) \prec (\mathcal{F}, \overline{m}_{\text{máx}})$

Lo cual es una contradicción, ya que $(\mathcal{G}_{\text{máx}}, m_{\text{máx}})$ es un elemento maximal de $\mathbb{H}$.

Así que, $\mathcal{G}_{\text{máx}} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\overline{\lambda} = m_{\text{máx}}$ satisface las condiciones del enunciado.

■

Ejemplo

Definamos $\Omega = (0,1]$ y $\mathcal{J}$ como el conjunto formado por el vacío y todos los intervalos de la forma $(a,b] \subset \Omega$, donde $a < b$.

Sea $\mathcal{A}$ la familia formada por los conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $I_1, \ldots, I_n$ son conjuntos en $\mathcal{J}$, ajenos por parejas.

$\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de Ω.

Para cada intervalo $I \in \mathcal{J}$, denotemos por $\ell(I)$ a la longitud del intervalo I y definamos $\ell(\emptyset) = 0$.

Para cada $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{A}$, definamos $\lambda(A) = \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j)$.

La función $\lambda : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ es no negativa, finitamente aditiva y $\lambda(\Omega) = 1$.

Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de los números racionales contenidos en el intervalo $(0, 1]$. Entonces:

1. $\mathbb{S} \notin \mathcal{A}$.

2. $\lambda_i(\mathbb{S}) = 0$ y $\lambda_e(\mathbb{S}) = 1$.

Por lo tanto, para cualquier $\mathbf{c}_0 \in [0, 1]$, existe una función $\overline{\lambda} : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto [0, 1]$ tal que:

1. $\overline{\lambda}$ es finitamente aditiva.

2. $\overline{\lambda}(A) = \lambda(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

3. $\overline{\lambda}(\mathbb{S}) = \mathbf{c}_0$.